Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper
Blatt 1
Abgabe: 29.10.2018

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.**
Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf dem Körper K. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Cauchyfolge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein n_o derart existiert, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0.$$

(a) Zeige, dass jede Cauchyfolge konvergiert, falls der Absolutbetrag trivial ist.

(b) Zeige, dass die Folge der reelle Zahlen $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

(c) Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Cauchyfolgen aus K mit koordinatenweiser Summe und Multiplikation. Zeige, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist.

(d) Zeige, dass K sich in R einbetten lässt.

(e) Zeige, dass

$$\mathcal{N} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge mit } a_n \to 0\}$$

ein maximales Ideal von $\mathcal{C}$ ist. Schließe daraus, dass $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ eine Körpererweiterung von K ist.

(f) Gegeben eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, setze

$$s_n = \sum_{k\leq n} a_k.$$

Wir nehmen nun an, dass der Absolutbetrag nichtarchimedisch ist. Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn $a_n \to 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(R, \mathcal{T})$ ein topologischer Ring mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \neq 0$ aus R offene disjunkte Teilmengen U und V mit $x \in U$ und $0 \in V$ gibt, so dass $R = U \cup V$. Zeige, dass die einzigen nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen von R die Einermengen sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei R ein kommutativer Ring, welcher genau ein maximales Ideal $\mathfrak{M}$ besitzt.

(a) Zeige, dass für jedes r aus $\mathfrak{M}$ das Element $1 + r$ eine Einheit von R ist.

(b) Schließe daraus, dass für jeden R-Modul M das Element m aus M genau dann Null ist, wenn m in $\mathfrak{M} \cdot m$ liegt.

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.